Minst och störst.

Kapitlets syfte

Efter kapitlet ”Talens jättar och dvärgar” är det dags att presentera användbara specialfall av dem. Det handlar i första hand om den (lilla) ryska nollan och i andra hand om den (stora) ryska oändligheten, som är väsentliga i min tankevärld.

De naturliga talen

De naturliga talen inleds i min värld med 1, alltså 1, 2, 3, …, vilket överensstämmer med originalversionen av Peanos axiom.

Den matematiska nollan

Nollan (0) är det enda tal som *saknar* tecken. Den är varken positiv eller negativ. Vidare är den det enda tal som *saknar* värde. Nollan används som markör för dels var de positiva och negativa talen möts och dels när en sifferposition saknar värde. Nollan är det enda tal som inte kan divideras med.

a < b

Tallinjen visar de reella talen i en **sorterings**ordning. När det gäller de positiva talen råkar talens sorteringsordning sammanfalla med deras **storleks**ordning. Uttrycket a < b bör generellt uttalas ”a ligger till vänster om b på tallinjen” och för de positiva talen dessutom varianten ”måttet a är mindre än måttet b”. När jag i texten nämner *små* tal, avser jag små, positiva talvärden, alltså absolutbelopp.

Positiva, reella tal

De positiva, reella talen bildar ett öppet intervall, vars gränser 0 och ∞ inte ingår. Talen inom intervallet saknar därför både minsta och största värde.

Den ryska nollan

Det startade för länge sedan i Norge. På en konferens i Kongsberg bollade jag en idé med ett par ryska matematiker. ”*Din tankegång håller inte*”, fick jag veta. ”*Du har satt ett variabelvärde till noll, men hur litet det än är, är det ändå alltid skilt från noll!*” Denna oändligt lilla flisa punkterade mitt, som jag trodde, vattentäta bevis.

Nollan som ändå inte är noll, kallar jag *den ryska nollan*. Den blev ett tankefrö, som under de fortsatta åren gav fäste åt flera spännande idéer. Det är tack vare den, som de här texterna har blivit formulerade. Jag har givit den ryska nollan beteckningen 0±, där avslutande ± ska påminna om, att 0± är ett *teckenförsett* tal (till skillnad från den exakta nollan).

0± är inte ett på förhand bestämt tal utan representerar i varje enskilt fall ett noll-liknande värde som är så litet, att vi i den aktuella situationen anser oss kunna bortse från det.

Här kommer ett exempel på den ryska nollan.

1 = 0,9 + 0,1.
1 = 0,99 + 0,01.
1 = 0,999 + 0,001.
. . .
1 = 0,999999999999999999999 + 0,000000000000000000001.
. . .

Ettan till vänster om likhetstecknet är hela tiden summan av två tal. Det ena närmar sig värdet 1 och det andra 0. Det obetydliga talet 0,000...0001 blir allt mindre, ju fler nollor jag fyller på med. Där ser du 0± tona fram. Den lilla ettan finns *alltid* i slutet efter alla nollorna, men när vi kommer upp i det, vi kallar ändlöst många nollor, bryter vår hjärna ihop och uppfattar den avlägsna decimalettan som försvunnen, så att 1 = 0,999... exakt. Alltså:

1 = 0,9999999999999999999999999999999999999999999… + 0±
≡ 0,9999999999999999999999999999999999999999999...

Men den ensamma ettan finns kvar! Den knuffas allt längre från decimalkommat, men ingenstans ändras förflyttningen av ettan till att den plötsligt blir en nolla. När vi tar bort 0±, skapar vi samtidigt ett *slut* på kedjan av nior som därmed inte kan vara gränslöst lång, bara väldigt lång. Vi förväxlar det ändlösa med det oändliga. Matematiklitteraturen är genomsyrad av 1 = 0,999… i olika varianter.

Kommentar:

> I kapitlet ”Min oändlighet” tar jag upp begreppen uppnåeliga respektive ouppnåeliga tal. Resonemanget ovan gäller för uppnåeligt antal decimaler. Om antalet däremot är ouppnåeligt, kan vi utnyttja, att decimalerna är cykliska. Då får vi, att x = 0,999... ger 10x - x = 9x = 9,999... - 0,999... = 9, det vill säga 9x = 9, alltså x = 1.
>
> Den ryska nollan (och längre ner den ryska oändligheten) har sin existens ihop med uppnåeliga tal, vilket sammanfaller med rationella tal. Se mer om detta i ”Min oändlighet”!

Punkten

Tal betraktas visuellt som punkter på tallinjen. Den (geometriska) punkten är ett nolldimensionellt objekt. Avsaknaden av dimensioner innebär, att den saknar utbredning. Vi kan sammanfatta med, att alla eventuella mått på punktens utbredning är *exakt 0*.

Två punkter som placeras helt intill varandra resulterar inte i en två punkter lång linje utan i en enda punkt, eftersom deras utbredning = 0 + 0 = 0, det vill säga 1 punkt. Hundra punkter som ligger i rad och i kontakt med varandra har utbredningen 100 x 0 = 0, alltså fortfarande en enda punkt.

Enda möjligheten att skapa utbredning med hjälp av punkter är att exempelvis placera ut två distinkta punkter A och B samt binda samman dem med ett endimensionellt tomrum i form av en kurva. Eftersom punkten saknar utbredning, kan vi rada upp hur många distinkta sådana som helst mellan A och B, till och med oändligt många, utan att de fyller ut någon som helst del av kurvan mellan ändpunkterna.

Detta ganska enkla konstaterande kan ställa till det i huvudet. En och annan tycks tro, att punkten trots allt har en utbredning, om än obeskrivligt liten, till exempel oändligt liten. Hur kan man annars bygga sammanhängande kurvor av punkter? Svaret är, att det kan man inte!

Motsvarande gäller för ytor och volymer. Det går inte att skapa dimensioner med enbart matematiska punkter.

Åt motsatta hållet går det bättre. Utsträckning i en godtyckligt vald dimension kan neutraliseras, genom att man tilldelar den längden 0 (= avsaknad av längd). Om den berörda dimensionen då försvinner eller ska betraktas som befintlig men oanvänd och i standby-läge får väl bli en fråga för filosoferna eller för den aktuella tillämpningen.

Vår klassiska värld beskrivs av tre utbredningsdimensioner, som vi ofta kallar längd, bredd och höjd. Jag hade lika gärna kunnat säga, att vi har 1000 sådana dimensioner, varav 997 stycken alltid har utbredningen 0, alltså saknar utbredning. Med det synsättet kan också punkten ha 1000 dimensioner. Larvigt, eller hur?

Reella tal

De rationella talen återfinns som punkter på en endimensionell tallinje. Ett irrationellt tal kan däremot inte representeras av en punkt. Om detta skriver jag utförligt i kapitlet ”Min oändlighet”.

Den ryska oändligheten

Det försvinnande lilla tal 0± jag kallar den ryska nollan kan alltid halveras till ett ännu mindre värde (som också är en rysk nolla). Det sanslöst stora tal jag kallar *den ryska oändligheten* kan alltid dubbleras till ett (till belopp) ännu större värde (som också är en rysk oändlighet). I analogi med 0± har jag givit den teckenförsedda ryska oändligheten beteckningen ∞±.

Både den ryska nollan 0± och den ryska oändligheten ∞± representerar i varje ögonblick ett teckenförsett tal.

Den vanliga nollan och oändligheten

0 är ett heltal som inte följer samma räkneregler som de positiva och negativa talen. ∞ kan definitivt inte tolkas som ett tal, men används i vissa fall som ett sådant, till exempel i fallet $\frac{7}{\infty} = 0$. Trots att ∞ saknar bestämt värde, utgår man från, att det är ett oändligt stort värde på något sätt. Det räcker i praktiken för att få resultatet 0. Jag är mycket tveksam till detta sätt att räkna. Jag föredrar att använda den ryska oändligheten och den ryska nollan genom att dividera med ∞± och få resultatet 0±, så här: $\frac{7}{\infty \pm} = 0 \pm$. Sedan ersätter jag 0± med 0 och är medveten om, att resultatet inte är exakt rätt.

Stor eller liten?

Ändlig storlek är relativ och avgörs av betraktarens tolkning. Min livslängd är ”oändligt” kort (0±) i det ”eviga” perspektivet. För mig själv är den hyggligt lång. Jämfört med vissa elementarpartiklars försvinnande korta liv, så lever jag ”nästan oändligt” länge. Min livslängd är med andra ord 0±, normal och ∞± på samma gång.

I kapitlet ”Gränsvärden” visar jag bland annat, att en funktion som växer mot oändligheten samtidigt går obönhörligt mot 0 beroende på, vem som betraktar den.