Oändliga tal och mängder.

Kapitlets syfte

Oändliga tal går hand i hand med oändliga mängder. Dessa står och faller med det så kallade diagonalbeviset. Jag presenterar detsamma. Därefter ger jag några motargument som i sin förlängning hänsynslöst underkänner detta fundamentala bevis.

Inledning

I den här kortversionen förutsätter jag, att läsaren har viss kunskap i mängdlära. Det gäller

Jämförelseverktyget som går under flera namn:
1-1-parning / 1-1-förhållande / 1-1-metoden

Kardinaltal:
Ett sådant står för ”storleksordning”. De ändliga kardinaltalen sammanfaller med de ändliga talen, som vi är vana vid. Talet 3 är alltså både ett vanligt tal och ett kardinaltal (storleksordning 3). Ett oändligt kardinaltal är enbart kardinaltal. Alla oändliga tal som anses vara av samma storleksordning representeras av ett och samma oändliga kardinaltal.
Mängden N av de naturliga talen (1, 2, 3, …) är gränslöst stor. Om vi säger, att N inte är en ändlig mängd, så är den i stället oändlig. Dess kardinaltal skrivs $\aleph_0$ (alef-noll) och betraktas som ett oändlighetstal.
Det finns en annan mängd, som kallas *c* eller *kontinuets mäktighet*. c är större än $\aleph_0$ enligt diagonalbeviset, som redovisas längre ner. c skrivs ibland som $\aleph_1$.

Allt större oändliga kardinaltal:
Numera lär det finnas hur många oändliga tal som helst, vilket motiveras med följande: Om b är ett oändligt kardinaltaltal, så är $c = 2^b$ ett större oändligt kardinaltaltal och $d = 2^c$ ett ännu större. De viktigaste verktygen för grundläggande utforskning av oändliga tal är 1-1-metoden och dess bundsförvant Diagonalbeviset.

I bandet “Theory of Sets” i bokserien “Elements of Mathematics”, skriven av låtsasförfattaren Nicolas Bourbaki, läser jag på sidan 183:

Definition 1: *En mängd sägs vara oändlig, om den inte är ändlig.*

Efter lite matematiskt småprat i boken följer

Oändlighetsaxiomet: *Det existerar en oändlig mängd.*

Matematikerna säger vidare, att *om* det finns ett oändligt tal, så tycks det också finnas flera sådana.

Ändliga mängder vet vi finns. Tre grisar i en stia bildar en ändlig mängd som innehåller 3 element (grisar). Om oändlighetsaxiomet (axiom = ej bevisat påstående, gissad sanning) är sant, finns det också minst en oändlig mängd (alltså innehållande oändligt många element, dock troligen inte grisar).

Det har vuxit fram en komplexitet kring hur oändliga tal kan tolkas och ordnas. Så blir det ofta, när de lärde får röra runt i grytan och uppfinna sina egna kryddor. Jag håller mig till den smaklösa enkelheten.

Först en kortfattat presentation av oändliga tal, så som de uppfattas av de icke helt oinsatta och därefter koncentration på det centrala diagonalbeviset. Så långt är allt lugnt och snällt, men sedan gör jag helt om och brister ut i en förödande kritik av nämnda bevis.

Kort om oändliga mängder

Låt oss anta att de naturliga talen är oändligt många och kalla den mängd de bildar för N. Låt oss jämföra N med den oändliga mängden Nj som innehåller alla jämna naturliga tal.

N:	1	2	3	4	5	6	7	8	…
Nj:	2	4	6	8	10	12	14	16	…

Mitt för varje tal n i N står ett unikt tal = 2 x n i Nj och mitt för varje jämnt j tal i Nj står ett unikt tal j/2 i N. Inget tal i den ena mängden är utan partner i den andra. Mängderna står i ett 1-1-förhållande till varandra och är då lika stora!

Matematikern bevisar genom att para ihop mängder till 1-1-läget, att *ett oändligt tal förblir oförändrat* om man exempelvis adderar, subtraherar, multiplicerar eller dividerar det med ett naturligt tal. Ett oändligt tal saknar speciellt värde. Det har bara en storleksordning (kardinalitet). Vad jag just visat är, att N och Nj hör till samma storleksordning. Som du ser, beträder vi en säregen värld, ett stänk av *Alice i underlandet*.

Diagonalbeviset

De oändliga talen, så som de betraktas i dag, står och faller med diagonalbeviset. Med hjälp av detta visas, att det finns olika stora oändliga mängder. Beviset är fundamentalt. Därför synar jag det noga.

Låt oss 1-1-jämföra de två oändliga mängderna N och D, där N är de naturliga talen och D de reella talen (tal med eller utan decimaler) i det öppna intervallet (0__1). I detta intervall har de reella talen allihop decimaler som inte alla är 0.

Nu är det dags för beviset, som de flesta som studerar oändliga tal får som första utmaning.

De båda mängderna paras ihop, så att de ser ut att gå jämnt ut. Därefter konstruerar jag ett reellt tal i det givna intervallet som visar sig inte finnas med i parningen och drar slutsatsen, att de reella talen är fler än de naturliga.

D-värdena kan skrivas 0,ddd…, t. ex. 0,8, 0,365, 0,0001000457. Vidare gäller som bekant, att decimaler alltid kan fyllas på i slutet med nollor, utan att värdet förändras. 0,4 är samma som 0,400000. På så sätt kan alla decimaltal ges oändligt många utfyllnadsdecimaler, när så önskas.

Jag plockar ut decimaltalen i intervallet (0__1) lite slumpvis men hela tiden olika, unika tal och skriver dem vertikalt i parningen, så här:

N:	1	2	3	4	5	6	7	…
D:	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	…
	5	9	0	4	7	6	8	
	4	4	4	0	0	8	5	
	0	5	3	2	3	1	0	
	2	6	3	1	1	2	1	
	8	9	7	8	7	0	3	
	5	5	4	8	7	9	9	
	4	9	7	6	6	3	1	
	…	…	…	…	…	…	…	

Talet 1 i N är kopplat till 0,5402854… i D.
Talet 5 i N är kopplat till 0,7031776… i D. o.s.v.
D–talen står som sagt inte i någon speciell ordning. Den har ingen betydelse för resonemanget.

Nu skapar jag ett nytt decimaltal T:

1. Om den *första* decimalen i det *första* decimaltalet i D är 1, så sätt den *första* decimalen i T till 2, annars till 1.
2. Om den *andra* decimalen i det *andra* decimaltalet i D är 1, så sätt den *andra* decimalen i T till 2, annars till 1.
3. Om den *tredje* decimalen i det *tredje* decimaltalet i D är 1, så sätt den *tredje* decimalen i T till 2, annars till 1.
4. Och så vidare.

Här är de nya siffrorna i fetstil. (Ettor byts till tvåor. Övriga byts till ettor).

N:	1	2	3	4	5	6	7	…
D:	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	
	5(**1**)	9	0	4	7	6	8	
	4	4(**1**)	4	0	0	8	5	
	0	5	3(**1**)	2	3	1	0	
	2	6	3	1(**2**)	1	2	1	
	8	9	7	8	7(**1**)	0	3	
	5	5	4	8	7	9(**1**)	9	
	4	9	7	6	6	3	1(**2**)	
	…	…	…	…	…	…	…	

De feta siffrorna bildar decimaltalet T = 0,1112112… Eftersom det är ett decimaltal mellan 0 och 1 ingår det i D, men

- Talet T skiljer sig från det första D–talet
  (eftersom deras första decimal, 5 och 1, är olika).
- T skiljer sig också från det andra talet i D
  (deras andra decimal, 4 och 1, är olika).
- T skiljer sig också från det tredje talet i D
  (deras tredje decimal, 3 och 1, är olika).
- och så vidare.

Det nya talet T skiljer sig från samtliga uppräknade tal i D, som i sin tur enligt förutsättningen är jämnt parade med talen i N och blir därför över. Då är D större än N. Stackars T blev utan partner!

Detta var diagonalbeviset. Med det bevisade jag, att den oändliga mängden av naturliga tal är av mindre storleksordning än den oändliga mängden av reella tal i intervallet (0...1) och därmed också mindre än den totala mängden reella tal, som i detta sammanhanget brukar betecknas med c eller $\aleph_1$.

Diagonalbeviset har alltså klarlagt, att $\aleph_0$ är mindre än $\aleph_1$. Eller … ?

Jag protesterar!

Resonemanget ovan togs upp av Georg Cantor i slutet av 1800-talet och har fått stå tämligen oemotsagt sedan dess. Jag förstår inte varför. Beviset ovan läcker som ett såll.

Det är dags för mig att avvika från de upptrampade stigarna. Med stridsyxan i den höjda näven anfaller jag den vedertagna oändligheten. Diagonalbeviset håller inte. Det finns allt för många motargument. Några följer nu.

Invändning 1 mot diagonalbeviset

Se tillbaka på beviset, där jag jämför N och D samt skapar ett nytt decimaltal T.

Jag förflyttar nu talen i uppställningen för D ett steg åt höger samt sätter in T som nytt förstatal, varefter 1-1-förhållande åter gäller. För varje nytt T som vi skapar, gör vi om denna procedur. Så här kan vi fortsätta i all oändlighet.

Om man godtar denna erkända oändlighetsegenskap, faller diagonalbeviset, för då är en oändlig mängd inte större än en annan, bara för att den innehåller några extra, oparade tal. Det oändliga kardinaltalet (storleksordningen) ändras inte. Man måste först bevisa, att mängden av de tal som blir över vid parningen med N är större än $\aleph_0$ (större än, eftersom $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$). Diagonalbeviset förutsätter just det som ska bevisas.

Invändning 2 mot diagonalbeviset

Mängden N av naturliga tal är oändlig. Då finns det också naturliga tal uppbyggda av ett oändligt antal siffror. Jag tänker visa med hjälp av diagonalbeviset, att mängden N är större än sig själv, alltså att beviset leder till en orimlighet.

Jämför mängden N = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ... med M = 2, 1, 3, 4, 5, 6, 7, ... Den enda skillnaden mellan N och M är, att de två första talen har bytt plats i M.

Jag parar ihop M och N.

M:	2	1	3	4	5	6	7	…
N:	1	2	3	4	5	6	7	…

Det är uppenbart, att M och N är lika stora, att de båda är N. Men...

Ett tal kan inledas med ett godtyckligt antal nollor, utan att dess värde förändras. Så är exempelvis 7 samma som ...0000007.

Nu parar jag ihop M och N igen i samma ordning som ovan men väljer att skriva M-talen vertikalt:

	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	
M:	2	1	3	4	5	6	7	8	9	0	1	…
N:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	…

Nedersta raden i M-uppställningen innehåller talens ental. Näst nedersta innehåller deras tiotal. Tredje nedersta deras hundratal och så vidare. Ovanför fyller jag på med nollor, något som inte ändrar talens värden.

Det vertikala skrivsättet gör ingen skillnad, för samma tal står fortfarande mitt för varandra (endast de två första talen har som sagt bytt plats i M).

Jag kör återigen diagonalmetoden och skapar ett nytt tal i samma anda som i jämförelsen mellan N och D ovan. I M ersätter jag siffran 1 med 7 och allt annat med 1, varvid jag kommer att få ett nytt tal ...1111111111 (ändlöst många ettor).

	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0(**1**)	
	0	0	0	0	0	0	0	0	0(**1**)	0	
	0	0	0	0	0	0	0	0(**1**)	0	0	
	0	0	0	0	0	0	0(**1**)	0	0	0	
	0	0	0	0	0	0(**1**)	0	0	0	0	
	0	0	0	0	0(**1**)	0	0	0	0	0	
	0	0	0	0(**1**)	0	0	0	0	0	0	
	0	0	0(**1**)	0	0	0	0	0	0	0	
	0	0(**1**)	0	0	0	0	0	0	0	1	
M:	2(**1**)	1	3	4	5	6	7	8	9	0	…
N:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	…

Det nya talet ...11111 är ett naturligt tal som inte finns med i M, eftersom det skiljer sig från varje tal i M i åtminstone en sifferposition. Det finns alltså ytterligare ett naturligt tal ...11111 som garanterat hamnar utanför hopparningen med N, varvid slutsatsen blir, att M är större än N.

Jag har nu med diagonalbeviset fastställt, att M är större än N.

Men M och N är samma mängd och det överblivna talet ...11111 är ett naturligt tal, som därför redan tillhör både M och N. Motsägelsen betyder, att det finns ett tankefel i diagonalbeviset.

Om jag ersätter mängden M med delmängden Nj (de jämna naturliga talen), så blir resultatet, att delmängden Nj är större än N.

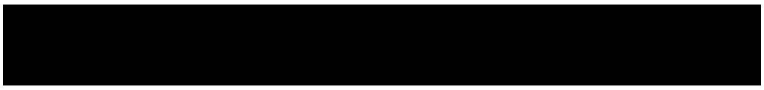
Invändning 3 mot diagonalbeviset

Ett ensiffrigt, naturligt tal kan beskriva 9 värden (1 till 9). Ett tvåsiffrigt dito kan beskriva 99 värden (01 till 99). Tresiffrigt ger 999 värden (001 till 999).

Låt mig skriva tal vertikalt (som jag gjorde nyss med M). Tänk dig, att varje siffra täcker en liten kvadratisk yta (samma för alla siffror). Först har vi de ensiffriga talen (9 stycken):

123456789

Talen motsvarar en rektangel med måtten 1 x 9 (1 siffra hög och 9 bred):



Kvadraten längst till vänster i rektangeln är 1/9 = 0,111... av rektangelns längd.

Det finns 99 stycken tvåsiffriga tal, tiotalsiffran i övre raden och entalsiffran i undre raden:

000000000111111111122222222223333333333 … 9999999999
123456789012345678901234567890123456789 … 0123456789

motsvarar en rektangel med måtten 2 x 99 eller omskalat för att få samma bredd som föregående: ungefär 0,2 x 9.

Vänsterkvadraten är nu 2/99 = 0,020202... av rektangelns längd.

Med tre siffror blir måtten 3 x 999 respektive omskalat ungefär 0,03 x 9.

Vänsterkvadraten är nu 3/999 = 0,003003003...

Fyra siffror ger måtten 4 x 9999 respektive omskalat ungefär 0,004 x 9.

Vänsterkvadraten är nu 4/9999 = 0,000400040004...

Rektangeln blir proportionellt sett allt tunnare. Att här tala om en diagonal är rent löjligt, då diagonalen bara täcker den allt mer, relativt sett, försvinnande lilla kvadratiska biten längst till vänster i rektangeln.

Med diagonalmetoden ändras bara de tal som följer diagonalen. De flesta talen ligger dock längre bort åt höger och där återfinns också det "nyskapade" talet.

Exempel

Tar vi tvåsiffriga tal och byter 0 mot 2 och övriga mot 4 (entalssiffran i undre raden och tiotalssiffran i övre raden) i diagonalen,

0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 3 3 3
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 1 2 …

så blir det nyskapade diagonaltalet 24. Det talet hittar vi bortanför kvadraten.

0 0(**2**) 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 2 2 2 2 2 **2** 2 2 2 2 2 3 3 3
1(**4**) 2 3 4 5 6 7 8 9 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 1 2 3 **4** 5 6 7 8 9 0 1 2 …

I ett tänkt uppnått "oändlighets"-läge väljer man att blåsa upp den, relativt sett, oändligt lilla vänsterkvadraten till att bli oändligt stor, en hisnande förändring, för att diagonalmetoden ska fungera.

Kommentar:

De ensiffriga talen 123456789 gav den första rektangeln måttet 1 x 9, med vänsterkvadraten 1 x 1. Om någon invänder: De 9 siffrorna ska inledas med 8 nollor. Då får man en 9 x 9-kvadrat som täcker de ensiffriga talen och då fungerar metoden.

Men... På det sättet skapar man ett *niosiffrigt* tal som självklart inte finns med bland de som ska undersökas, alltså de ensiffriga.

Byt 1 till 2 och övriga till 7 i diagonalen.

000000000		00000000**7**		**7**		
000000000		0000000**7**0		**7**		
000000000		000000**7**00		**7**		
000000000		00000**7**000		**7**		
000000000	ger	0000**7**0000	det nya talet	**7**	alltså	777777772
000000000		000**7**00000		**7**		
000000000		00**7**000000		**7**		
000000000		0**7**0000000		**7**		
123456789		**2**23456789		**2**		

Det nya talet hör till rektangeln för niosiffriga tal, varför man är tillbaka i en rektangel, där det nya talet redan finns. Så lite var den invändningen värd!

Konsekvenser

Nu har jag redovisat tre olika invändningar. Det räcker, att en av dem är hållbar, för att jag ska kunna dra slutsatsen, att diagonalbeviset inte fungerar, som det är tänkt.

Alan Turing, känd som uppfinnaren av Turingmaskinen, föregångare till datorn, bevisade, att det finns tal som inte kan beräknas av en maskin. Han ställde upp alla (oändligt många) beräkningsbara tal i en tänkt tabell. Sedan skapade han ett nytt tal genom att ändra första siffran i första talet, andra siffran i andra talet och så vidare. Jag behöver inte säga mer. Du känner säkert igen principen från diagonalbeviset. Jag konstaterar, att Turings bevis därmed också vacklar.

1931 bevisade matematikern och logikern Kurt Gödel, att det finns matematiska påståenden, som varken kan bevisas vara sanna eller falska. Därmed går det inte att konstruera heltäckande matematiska system. Det finns alltid oavgörbara satser. I beviset för Gödels oavgörbarhetsteorem ingår, om jag har förstått det rätt, en variant av diagonalbeviset, så då ligger även det teoremet illa till.

Slutsats

Diagonalbeviset är så tvivelaktigt, att den inte bör användas. Därmed faller de slutsatser om oändlighetstal som bygger på diagonalbeviset.

Jag vill ha tillbaka mina gamla oändliga tal!

Alternativ

Det sägs, att det är lättare att kritisera än att komma med alternativa lösningar. I min värld står det klart, att vi behöver ett annat synsätt på oändlighetsbegreppet. Därför presenterar jag en egen konstruktion i kapitlet ”Min oändlighet”.