Min oändlighet.

Kapitlets syfte

Den klassiska synen på oändliga mängder är bristfällig. Här ger jag min tolkning.

Kort om några ”viktigheter”

Punkt

Redovisas fylligare i kapitlet ”Minst och störst”.

Punkten *saknar* egenskapen dimension.

Om två punkter har ett avstånd mellan sig, är de åtskilda. Om avståndet är 0, alltså när de ligger i tänkt kontakt med varandra, är de en och samma punkt. Detta följer av deras dimensionslöshet (0 + 0 = 0).

Gränsvärde och slutvärde

Redovisas fylligare i kapitlet ”Gränsvärden”.

I det här kapitlet använder jag mig huvudsakligen av monotont växande talföljder. Om talföljden når fram till ett avslutande värde, kallar jag det för *slutvärde*. I annat fall är det ett *gränsvärde*. För att få heta gränsvärde krävs alltså, att följden är utan slut.

Alltså: Ett slutvärde uppnås, men ett gränsvärde är ouppnåeligt.

När en talföljd leder mot ett gränsvärde, styrs konvergensen av bestämda egenskaper hos talen i följden. Hos gränsvärdet har en eller flera av dessa egenskaper ändrats eller fallit bort och andra kan ha tillkommit.

Talföljden 1/2, 2/3, 3/4, ..., n/(n+1) har slutvärdet n/(n+1), exempelvis 999/1000. Följden 1/2, 2/3, 3/4, ... har å andra sidan ett ouppnåeligt gränsvärde som är exakt 1. Alla ingående termer är oföränderligt äkta bråk, det vill säga sådana, som inte kan reduceras till heltal, men gränsvärdet 1 är ett heltal. Denna förändring är kvittot på, att gränsvärdet är identifierat.

Peanos axiomsystem

Peanos axiomsystem består av fem axiom, där de tre första lyder:

1. *Talet 1 är ett naturligt tal.*
2. *Varje naturligt tal x har exakt en efterföljare, betecknas σ(x), som också är ett naturligt tal.*
3. *Det finns inget naturligt tal sådant att σ(x) = 1.*

Axiom 1 säger, att 1 är ett naturligt tal och axiom 3 att 1 är det *första* naturliga talet. Axiom 2 definierar *efterföljare*, ett begrepp som är centralt i min framställning.

Peano angav talet 1 som första tal. Senare har en del matematiker ändrat förstatalet till 0. Helt fel, anser jag. Alla naturliga tal uppträder på samma sätt till skillnad från 0. Nollan är en katt bland hermelinerna, därav mitt val 1. Varje naturligt tal har ett värde, medan nollan är det enda tal som är värdelöst!

Utgående från axiomsystemet kan man bevisa ett antal satser och därigenom få fram, att efterföljaren till varje naturligt tal n är n + 1.

Oändliga tveksamheter

Den vedertagna synen på oändliga mängder dras med tvivelaktigheter.

Exempel 1 – att räkna ändligt i oändligheten:

> Mängden A innehåller n element. Antalet delmängder till A är, med mängden själv och den tomma mängden inräknade, 2^n. Detta kan verifieras för ändliga värden på n.
>
> Men om n byts ut mot ett oändligt tal m, är det ett oändligt kardinaltal utan bestämt värde – bara en storleksordning som representerar oändligt många värden.
>
> *Trots att n och m är väsenskilda, hanterar man m precis som n och säger, att antalet delmängder till den oändliga mängden är 2^m.*
>
> Sammanfattning: Så här räknar vi, när det gäller ändliga mängder, så då gör vi på samma sätt för oändliga mängder.

Exempel 2 – att inte räkna ändligt i oändligheten:

> Om vi har en stor, ändlig mängd och tar bort cirka hälften av elementen, får vi en mindre mängd som resultat. Men om vi halverar en oändligt stor mängd, så är den fortfarande lika stor. Samma gäller om vi dubblerar mängden eller multiplicerar dess storlek med sig själv. Mängden är oförändrat stor.

Sammanfattning: Så här räknar vi, när det gäller ändliga mängder, men inte när det handlar om oändliga mängder.

Exempel 3 – kombinera exempel 1 och 2:

Jag väljer kardinaltalet m i exempel 1. Enligt oändlighetsmatematiken (exempel 2) är m x m = m^2 = m. Då är även m^3 = m, och så vidare: m^n = m. I exempel 1 behandlades n och m på likvärdiga sätt. Skrev man 2^n så skulle det också fungera för 2^m. Byt nu n till m i m^n = m och vi får m^m = m.

m > 2 ger $m^m > 2^m$. Samtidigt säger Cantors sats, att $m < 2^m$. Av allt detta får vi, att $m = m^m > 2^m > m$, det vill säga m > m. Hur bortförklarar man denna störande motsägelse? Ska vi räkna ändligt eller oändligt eller på båda sätten samtidigt?

Exempel 4 – att sätta oändligt stort lika med 0:

Jag utgår från mängden N_n = {1, 2, 3, … , n} och börjar med n = 9, alltså N_n = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, och jämför den med sin delmängd jämna tal, J_n, som är {2, 4, 6, 8}. När vi parar ihop dem,

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8					

blir delmängden {5, 6, 7, 8, 9} över i N_n. N_n har ungefär dubbelt så många element som J_n, så när n vandrar iväg mot oändligheten, så gör också skillnaden i antal element hos mängderna , cirka n/2, det.

Ändå förväntas vi acceptera, att denna ständigt växande enorma skillnad bara försvinner, pyser ihop till 0, när den blir oändligt stor.

Sammanfattning: Trots att $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2}=\infty$, ändrar vi resultatet till 0 för att få tillgång till 1-1-utjämningar borta i oändligheten.

Exempel 5 – Diagonalmetoden

Det finns flera allvarliga invändningar mot den i sammanhanget mycket viktiga diagonalmetoden. Några av dessa redovisar jag i kapitlet ”Oändliga tal och mängder”.

Man kan givetvis sätta upp vilka spelregler som helst i matematiken och från dem bygga komplexa mönster som i fallet oändliga mängder. Men när det börjar gnissla i maskineriet och spiralfjädrar hoppar strömhopp ur madrassen, då är det kanske dags att tänka om.

Hur mängder definieras

Den vanligaste uppdelningen av mängdtyper ger den ändliga och den oändliga mängden. Man definierar först den ena och låter sedan den andra vara det, som inte stämmer med den första definitionen. Utgående från självklarheten att ändliga mängder existerar, definieras ofta oändliga mängder så här.

> *En mängd är oändlig, om den inte är ändlig.*

Om man istället fastställer, vad som menas med en oändlig mängd, får man

> *En mängd är ändlig, om den inte är oändlig.*

Jämförandet är en onödig inskränkning som kan lägga krokben för andra mängdtyper.

Mängden M = {1, 2, 3, ..., n} innehåller n element. Den är ändlig. Samtidigt finns det ingen gräns uppåt för det naturliga talet n. Hur stort jag än väljer värdet, finns det alltid *ändlöst* många större att tillgå. Se hisnande exempel i kapitlet ” Talens jättar och dvärgar”.

Det oändliga är ju onekligen ändlöst och det ändlösa är väl inte den bästa beskrivningen av ändligt. Vad skiljer dem då åt?

Tar jag i M = {1, 2, 3, ..., n} bort n, får jag mängden N = {1, 2, 3, ...}, där de tre punkterna markerar avsaknad av slut. N står i läroböckerna för mängden av alla naturliga tal och är av prickarna att döma en oändlig mängd. Skillnaden tycks hänga på ett n. När ramlar lilla n bort, så att det ändliga växlar över till det oändliga? Jag förbryllas av denna tankesuddighet. Mig veterligt finns det inget ställe, där ett naturligt tal flippar över till ett oändligt tal och då upphör att vara naturligt enligt definition, men trots detta fortsätter att betraktas som naturligt.

Bättre än ovanstående definitioner är, att varje mängdtyp i möjligaste mån definieras utan jämförelse med annan mängdtyp. Ibland kan en mängdtyp vara en utvidgning av en annan och då är jämförelse ej inskränkande. Det kan bli något i den här stilen:

Oändlig mängd (Dedekind 1888):

> *En mängd är oändlig, om den är lika stor som (mer exakt: ekvivalent med) en äkta delmängd av sig själv.*

Ändlig mängd:

> *En mängd är ändlig, om dess antal element begränsas av ett naturligt tal.*

Om vi utgår från det klassiska läget, är mängderna N = {1, 2, 3, 4, ...} och dess delmängd NJ = {2, 4, 6, 8, ...} lika stora (eftersom de är ekvivalenta). Alltså är mängden N i överensstämmelse med definitionen av oändlig mängd.

Jag är emellertid långt ifrån klar med N och återkommer till den mängden efter genomgången av exakta och diffusa tal.

Om vi jämför mängden M = {1, 2, 3, 4, 5, 6} med sin delmängd av jämna termer, alltså MJ = {2, 4, 6}, så ser vi, att M har 6 element och MJ har 3. De är alltså inte lika stora, så därför är M inte en oändlig mängd.

Betrakta följande, av mig påhittade, typdefinition.

> *En följd av siffror bildar ett decimallöst tal T > 0.*
> *En mängd kallas hybrismängd, om dess antal element är T.*

Två elementantal som duger är t1 = 12583 och t2 = 224411. Ett tredje är den sifferföljd som fås av *decimalerna* till π, alltså t3 = 14159265358979... . Ett fjärde är decimalföljden hos talet e, alltså t4 = 71828182845904... .

Om T = t1 = 12583, är hybrismängden ändlig. Ifall T = t3 = 14159265358979... är mängden oändlig.

Lägg märke till, att trots att t3 och t4 enbart är uppbyggda av siffror som bildar decimallösa, positiva tal > 0, är de inte naturliga. För två olika naturliga tal a och b gäller, att a < b eller b < a. Men det går inte att avgöra, vilket som är störst av t3 och t4, eftersom vi aldrig kan få fram deras respektive antal siffror. Om t3 har fler siffror än t4 är t3 störst, annars är det tvärtom. t3 och t4 uppfyller inte Peanos axiom.

En hybrismängd kan vara ändlig eller oändlig utan att vara definierad som någondera av dem.

Definitioner

Definition 1:

> Med **stegning** avses förflyttningar från ett heltal till ett annat via additioner med 1 eller -1.

Stegning är en lätt utvidgning av begreppet efterföljare. Från 1 når jag det naturliga talet n via stegning med +1 ett givet antal gånger, vilket är samma som att ta sig genom ett givet antal efterföljare. Från n når jag tillbaka till 1 via lika många negativa stegningar (-1).

På samma sätt når jag från 1 ett godtyckligt heltal m via stegning med +1 eller -1. Återstegning från m till 1 sker med omvända tecken.

Definition 2:

> Ett tal är **uppnåeligt**, om det är 1 eller kan nås via stegning från 1.
> Ett tal är **ouppnåeligt**, om det *inte* kan nås via stegning från 1.

Om ett tal är (formellt) uppnåeligt, så är det ändligt, oberoende av hur stort det är.

Definition 3:

> En **ändlig mängd** har ett uppnåeligt antal element.
> En **oändlig mängd** har ett ouppnåeligt antal element.

Definition 4:

Ett tal som är uppnåeligt, är ett **exakt tal**.
Ett tal som är ouppnåeligt, är ett **diffust tal**.

Naturliga tal

Peanos axiom ger, att varje naturligt tal > 1 kan nås via stegning från 1. Talet 1 nås genom återstegning från annat naturligt tal.

Slutsats:

Varje naturligt tal är exakt, eftersom det är uppnåeligt.

Heltal

Varje negativt heltal är ett naturligt tal med omvänt tecken, så det är också uppnåeligt. Slutligen är även talet 0 uppnåeligt.

Slutsats:

Varje heltal är exakt, eftersom det är uppnåeligt.

Rationella tal

Jag definierar ett rationellt tal som ett bråk a/b, där a är ett heltal och b ett naturligt tal (b $\geq$ 1 enligt Peanos axiom ovan).

För ett godtyckligt bråk gäller, att dess kvot är ett tal med eller utan decimaler. I vissa fall blir decimalerna oändligt många, fast med cyklisk upprepning efter ett antal inledande decimaler. Exempelvis är 15/7 = 2,14285714285714…, där 142857 upprepas cykliskt utan slut direkt efter decimalkommat. Jag markerar vid behov cyklisk upprepning med understrykning, så 2,14285714285714… = $2,\underline{142857}$.

Vilket antal decimaler kvoten har beror inte på talvärdet, utan på vilken *bas* vi presenterar bråket i. Jag noterar basen som ett index inom parentes, så här för bas 10: $1204_{(10)}$. Om jag väljer bråkets nämnare b som bas, blir uträkningen av bråket alltid ett värde med högst 1 decimal (ingen, om divisionen går jämnt upp).

Exemplet 15/7 ger med bas 7 (har siffrorna 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6) :

$(15/7)_{(10)} = 2,\underline{142857}_{(10)}$
$(21/10)_{(7)} = 2,1_{(7)}$

Ett exempel med bas 17 (har siffrorna 0, 1, 2, …, 9, A, B, …, G):

$(11/17)_{(10)} = 0,\underline{6470588235294117}_{(10)}$
$(B/10)_{(17)} = 0,B_{(17)}$

Ett rationellt tal på decimalform kan alltid skrivas på bråkform, till exempel

> **1,944:**
> 1,944 = 1944/1000 = 243/125.
>
> **1,9444… :**
> w = 1,9$\underline{4}$;
> 90w =100w - 10w = 194,$\underline{4}$ - 19,$\underline{4}$ = 175;
> w = 175/90 = 35/18;
> 1,9444… = 35/18.

Ett godtyckligt bråk a/b kan nås genom stegning från 1. I varje steg adderar jag parallellt 1 till nämnaren och 1 eller -1 till täljaren, tills jag når fram till ett av a och b. Sedan fortsätter jag färdigt med den andra bråkdelen. Från ett givet bråk kan jag på motsvarande sätt backa tillbaka till 1/1 = 1. Alternativt (om jag inte vill stega parallellt) kan jag först stega exempelvis täljaren och därefter nämnaren.

-3/7:

> 1 = 1/1 → 0/2 → -1/3 → -2/4 → -3/5 → -3/6 → -3/7.
> -3/7 → -2/6 → -1/5 → 0/4 → 1/3 → 1/2 → 1/1 = 1.

Varje rationellt tal är alltså ett exakt tal.

Slutsats:

> Varje rationellt tal är exakt, eftersom det är uppnåeligt.

Irrationella tal

Kortfattat kan man säga, att ett irrationellt tal är ett tal som inte kan representeras av ett bråk a/b enligt ovan. Detta innebär, att talet har ett ouppnåeligt antal decimaler och att avslutande cykliska upprepningar saknas.

Jag tar nu hjälp av intervallinkapslingssatsen, sådan som jag beskriver den i kapitlet Gränsvärden (vänligen se detta, om du inte redan gjort det).

Jag har ett positivt irrationellt tal $t = H,d_1d_2d_3\ldots$ (H = heltalsdel, d_i = decimal nr i). t kan göras om till en monotont växande oändlig talföljd

> $T = H,d_1 \quad H,d_1d_2 \quad H,d_1d_2d_3 \ldots$

som i sin tur kan användas som undre ändvärden i en följd av slutna, reella intervall.

Vi har $H \leq H,d_1 \leq H,d_1d_2 \leq H,d_1d_2d_3 \leq \ \ldots < H + 1$
(sträng olikhet, eftersom H,999... är cyklisk och därmed inte ett irrationellt tal)

Eftersom följden T har en övre gräns = H + 1, har den i egenskap av reellt tal en minsta övre gräns g = följdens gränsvärde.

Jag skapar nu den reella intervallföljden

$[H\_\_g]$, $[H,d_1\_\_g]$, $[H,d_1d_2\_\_g]$, $[H,d_1d_2d_3\_\_g]$, … ,
där intervallens undre ändvärden ges av den monotont växande talföljden T och där det övre ändvärdet g är fast. Intervallföljden uppfyller villkoren för intervallinkapslingssatsen, så slutsatsen blir, att det alltid finns oändligt många alternativ för T-talföljden, alltså en oändlig mängd ej exakta värdevarianter hos t.

Den undre gränsen $(H,d_1d_2d_3…)$ flyttar allt närmare den övre (g) utan att någonsin nå fram till g. Detta g ingår i alla slutna intervall tillsammans med oändligt många andra värden, men g blir dock aldrig ensam herre på täppan.

Intervallinkapslingssatsen fastställer, att ett irrationellt tal är diffust. Det har oändligt många olika värden, varav ett enda, g, garanterat ingår i alla slutna intervallen. Å andra sidan kan vi aldrig identifiera detta g exakt, på grund av att dess antal decimaler är oändligt (ouppnåeligt). I egenskap av monotont gränsvärde är g ouppnåeligt och tillhör inte lösningsmängden.

Talet är ett *intervall* på tallinjen, där den undre gränsen aldrig kan fastställas, eftersom den är rörlig, men där man dock vet, att den är mindre än den övre gränsen som är det ej identifierbara värdet g ovan. En konsekvens blir, att det irrationella talet har egenskapen dimension (ett 1-dimensionellt linjesegment).

Slutsats:

> Varje irrationellt tal är diffust, eftersom det har ett ouppnåeligt antal icke-cykliska decimaler.
>
> Då ett irrationellt tal är en sammanfattning av oändligt många alternativa värden, kan det diffusa talet självt betraktas som en oändlig mängd alternativa värden.
>
> Ett irrationellt tal har egenskapen dimension > 0, till skillnad från ett rationellt tal som saknar dimension (= 0).

Taluppdelning

Ett godtyckligt reellt tal R innehåller upp till tre separata delar – en heltalsdel n, en rationell del r och en irrationell del s. Om n, r eller s saknas i ett givet tal, markeras de med 0 för n, 0 eller utelämnas för r samt utelämnas för s.

$R = n + r + s$.

Vi har, att r är ett uppnåeligt tal med begränsningen $0 < r < 1$. Med uppnåeligt menar jag, som redan nämnts, att r har ett definitionsmässigt fixt antal decimaler (eventuellt efter basbyte enligt ovan), vilket inte hindrar, att antalet kan vara ändlöst stort. r har ett exakt värde, vilket även framgår av, att det kan presenteras som ett bråk a/b, $b \neq 0$.

Jag exemplifierar taluppdelningen med $\pi = 3{,}141592653589793...$

	n		r		s
1. $\pi =$	3	+	0,1	+	0,041592653589793...
2. $\pi =$	3	+	0,14	+	0,001592653589793...
3. $\pi =$	3	+	0,141	+	0,000592653589793...
4. $\pi =$	3	+	0,1415	+	0,000092653589793...

. . .

Antalet decimaler i r växer monotont mot oändligheten eftersom π är irrationellt (alltid en oändlig följd av varierande decimaler som aldrig blir cykliska). s är den irrationella delen, vars värde avtar monotont mot 0. Både n och r har i varje steg exakta värden.

För s gäller, att det bortom de uppräkneligt inledande decimalnollorna (= antalet decimaler i r), oberoende av hur många dessa är, finns en fortsättning av blandade decimaler utan slut, vars antal därför är ouppnåeligt, det vill säga oändligt. Det innebär i sin tur, att oändlighetsmatematik gäller för s. Vårt s saknar exakt värde och är istället en oändlig mängd av olika värden, alla lika giltiga på grund av oändlighetsmatematiken. De ligger alla i det öppna intervallet (0__0±).

Kommentar

> 0± är den ryska nollan, godtyckligt liten men ändå inte exakt 0, som presenteras i kapitlet ”Minst och störst”.

Denna talmängd ger jag symbolen Θ (theta ser ut som en nolla som omsluter ett litet intervall) och kallar den för Θ-mängden.

Med exemplet π visade jag, att den irrationella delen alltid kan förvisas till intervallet (0__0±).

Jag kan nu skriva om $R = n + r + s$ till $R = n + r + \Theta$.

Alla beräkningar vi gör med irrationella tal, utför vi i själva verket med den reducerade rationella delen. Vi räknar inte med talet $n + r + \Theta$ utan med $n + r$.

I praktiken är $\pi - \pi = n + r - (n + r) = 0$, vilket inte är helt korrekt. Den verkliga skillnaden är resterande $\Theta - \Theta$, en skillnad som är lika hopplös att hitta som $\infty - \infty$. Trots att alla värdena $\Theta - \Theta$ är oändligt små, är inget av dem exakt 0. I det öppna intervallet (0__0±) som omsluter Θ finns 0 inte med.

Vad som är speciellt för Θ-mängden är, att dess samtliga element är tal med värden oskiljbart nära 0.

Kommentar

> Vi kan aldrig nå en position på tallinjen, där $n + r$ övergår i $n + r + \Theta$, precis som det inte går att följa uppräkneliga tal, exempelvis de naturliga, till en sammanhängande oändlighetsövergång.

Dags att presentera ett aldrig tidigare skådat irrationellt tal:

$$1 + \Theta$$

Varje enskilt rationellt tal kan få sitt enda värde omvandlat till en oändligt många olika värden genom addering med Θ.

N, mängden av naturliga tal, är orimlig

Gox

Först repeterar jag ett enormt stort naturligt tal.

Talet *googol* = 10^{100}
= 10000 000000 000000 000000 000000 000000 000000 000000 000000
000000 000000 000000 000000 000000 000000 000000 000000.
Talet är, trots sin storlek, ett naturligt tal.

Talet *googolplex* = 10^{googol} är också ett naturligt tal, men större.

Skapa en följd av tal enligt mallen $a_i^{a_i} = a_{i+1}$, där a och i är naturliga tal.

Välj $a_1 =$ 2. Det ger $a_2 =$ $2^2 = 4$ som ger $a_3 =$ $4^4 = 256$, som ger $a_4 =$ 256^{256}, som är förkrossande mycket större än googol.

Sätt nu a_1 = googolplex, vilket ger, att a_2 = $\text{googolplex}^{\text{googolplex}}$. Det slutliga talet jag är ute efter i talföljden är talet $a_{googolplex}$. Detta naturliga tal kallar jag ***gox***. Trots sin ”omöjliga” storlek är det i alla fall ett naturligt tal. Är du inte nöjd med talet gox, sätter du a_1 = gox och kör igenom talföljden till tal nummer gox, men du når ändå aldrig oändligheten. Ändlöst är inte samma sak som oändligt.

Naturliga tal

Jag utgår från Peanos ursprungliga axiomsystem, där de naturliga talen börjar med 1. Se ovan, sidan 2.

Ändlig mängd

Jag utgår från talmängden $M_n = \{1, 2, 3, ..., n\}$ (n naturligt tal) som innehåller n element. Alla godtyckliga mängder med n element är ekvivalenta med M_n. M_n är uppräknelig, är växande sorterad och innehåller både ett minsta och ett största värde (1 och n).

Ändlighetsmatematik gäller, så 1-1-parning mellan {gris, kossa, lamm} (ekvivalent med $M_3 = \{1, 2, 3\}$) och $M_4 = \{1, 2, 3, 4\}$ visar, att M_4 har fler element än M_3.

Ändlös mängd

Nu pillar jag bort n i M_n och får talmängden M = {1, 2, 3, ... }. Den är uppräknelig, är växande sorterad och innehåller ett minsta värde (1) men saknar ett största värde. Givetvis gäller Peanos axiomsystem för de enskilda elementen. Ändlighetsmatematik råder fortfarande. Var vi än tittar in i M, ser vi utan undantag, att varje element har sin efterföljare. Således är gox + 1 efterföljaren till ovan nämnda gox.

Oändlig mängd

Oändliga mängder lyder under en egen, speciell oändlighetsmatematik. Bland annat innehåller varje oändlig mängd OO äkta delmängder, som är lika stora som OO. Kardinaltalet för OO anger en storleksordning, men inget exakt värde.

Följande är hämtat från "Theory of Sets" av Nicolas Bourbaki:
Definition: *En mängd sägs vara oändlig, om den inte är ändlig*.
Oändlighetsaxiomet: *Det existerar en oändlig mängd.*

De naturliga talen är ändlöst många och får inte plats i en ändlig mängd med på förhand given storlek. Bourbaki-definitionen ger då, att mängden N av alla naturliga tal är oändlig.

Delmängder kan konstrueras enligt mallen M_n = {1,2,...,n}. När vi låter n gå mot oändligheten är gränsvärdet för n det oändligat kardinaltalet alef-noll: $\aleph_0$. Som jag behandlat på annan plats är gränsvärdet för en monotont, strängt växande ändlös talföljd *ouppnåeligt*. Jag har vidare visat, att ett sådant gränsvärde saknar de egenskaper som styr konvergensen. I det här fallet ser vi, att Peanos efterföljare har trillat bort i gränsvärdet. Mängden N är det ouppnåeliga oändlighetsmålet, alltså:

$$N = \lim_{n\to\infty}\{1, 2, \dots, n\} \text{ och } \aleph_0 = \lim_{n\to\infty} n$$

Varje ändlös mängd saknar slut men når aldrig fram till att övergå till att bli en oändlig mängd, eftersom nämnda gränsvärde är ouppnåeligt. Mängderna tillhör två helt skilda världar.

N innehåller oändligt många oändliga tal, där inget av dem lyder under Peanos axiomsystem, eftersom addition med 1 aldrig ger en efterföljare. N består till största delen av icke-naturliga oändliga tal. Då är det givetvis fel att kalla N för mängden av alla naturliga tal.

Mängden N av alla naturliga tal (och ingenting annat)
är en omöjlig konstruktion!

Detta lilla konstaterande ändrar mängdlärans spelplan.

Alla naturliga tal måste, oberoende av hur ändlöst stora de än är, följa samma matematiska regelverk. Det är inte korrekt att påstå, att mängden N av alla naturliga tal är lika stor som mängden J av alla jämna, naturliga tal. Anledningen är givetvis, att det enligt ovan inte går att konstruera några sådana mängder att jämföra med varandra. Om N = {1, 2, 3, ...} inte kan renodlas till att bara innehålla naturliga tal, gäller samma för J = {2, 4, 6, ...}.

Hej då, Hilberts hotell!

Hilberts hotell, kommentar

> Detta i matematikens mängdlära så kända hotell har oändligt många rum, som samtliga har gäster. Inget ledigt rum alltså. Nu kommer en ny person och vill ta in på hotellet. Receptionisten löser problemet genom att flytta varje inneboende gäst till nästa rumsnummer (nr 1 till 2, nr 2 till 3 och så vidare). Se! Nu blev rum 1 ledigt och där placerades den nya gästen.
>
> Resonemanget faller på en felaktighet. Varje påstående skall grundas på en given förutsättning. Här är den, att samtliga rum är upptagna. Den egenskapen gäller varenda rum oberoende av, var det befinner sig. Massflyttningen förutsätter emellertid, att det trots allt finns rum med egenskapen ”ledigt” någonstans borta i oändligheten, det vill säga, den givna förutsättningen motsägs.
>
> Dessutom: När rumsnumrena blir oändliga, slutar turordningen att fungera, så ingen av gästerna där borta vet, vilket rum de ska flytta till.

En följdeffekt är, att inte heller mängden av alla rationella tal är möjlig att skapa.

Ett berömt intervall

De reella talen i intervallet från 0 till 1 på tallinjen bildar mängden kontinuum (eller kontinuets mäktighet). Antalet element är kardinaltalet c.

Jag pudrar intervallet med ett antal någorlunda jämnt fördelade delningspunkter. Ju fler punkterna är, desto kortare blir delintervallen. När jag låter antalet delningspunkter vara oändligt, alltså ouppnåeligt, är delintervallen oändligt små (ouppnåeligt små), men trots det äkta delintervall. Om de hade ”uppnått” den exakta längden 0, hade de blivit punkter och då tappat sin längddimension, varvid hela intervallet hade försvunnit in i en punkt.

De oändligt små äkta delintervallen identifieras på tallinjen som de diffusa tal, vi kallar irrationella. De ouppnåeligt många delningspunkterna saknar alla dimension, punkten är den ultimata anorektikern, och bidrar därför inte till linjens utbredning. Denna fås av enbart de irrationella talen.

Bland de ouppnåeligt många delningspunkterna återfinns de exakta talen, alltså de rationella talen. Dessa är dock alltför få (har inte den kardinalitet som behövs), för att krama fram de irrationella talen.

Ett lite annat sätt att se på intervallet:

> Om vi tar bort alla punkter som står för rationella tal i ett intervall, så ändrar detta inte intervallets sammanlagda längd. Vad som återstår är de irrationella talen. Det är med andra ord dessa och inga andra som bygger tallinjens utsträckning. Då kan de inte heller vara punktformiga, det vill säga

exakta tal. De är alltså diffusa och har den äkta dimensionsegenskapen.

Några av mina mängdtyper

- Uppräknelig mängd
- Oändlig mängd
- Äkta oändlig mängd
- Hybrismängden
- Θ-mängden

Uppräknelig mängd:

> *En mängd är uppräknelig, om dess antal element begränsas av ett naturligt tal.*

Mängdtypen delas upp i två fall.

Fall 1.
Detta är mängdtypen som kallas ändlig mängd.

Mängden kan noteras som {1, 2, 3, ... n}, där n är ett givet, naturligt tal. Värdet n ger oss det exakta antalet element i mängden. Räknereglerna är välkända och genomtänkta.

Fall 2.
Mängden kan skrivas {1, 2, 3, ... x} eller {1, 2, 3, ...}, där x är ett icke angivet, naturligt tal (utelämnat x är underförstått). Så fort värdet x ges, blir resultatet som i fall 1. Fall 2 är en generalisering av fall 1. Samma räkneregler gäller i båda fallen.

Kommentar

> Hur stort vi än sätter x i fall 2, kan vi i alla fall dra till med ändå större värden på x som fortfarande är uppnåeliga ($x + 1000 > x$). Av det skälet kallar jag uppräkneliga mängder som saknar övre gräns för ändlösa, men inte oändliga.
>
> I det oändliga fallet gäller oändlighetsmatematik ($x + 1000 = x$). Vi kommer alltså inte högre än x inom det aktuella kardinaltalet.

Oändlig mängd (Dedekind 1888):

> *En mängd är oändlig, om den är lika stor som (mer exakt: ekvivalent med) en äkta delmängd av sig själv.*

Här bör en varning utfärdas. I fallet mängden av reella tal handlar det om en kombinerad mängd. Den är dels en äkta oändlig mängd (se nedan) som är mängden av irrationella tal och dels en uppräknelig mängd (de rationella talen).

De båda mängdtyperna följer olika räkneregler, så det gäller att ha klart för sig, när vilken av dem ska gälla. Risken finns, att man tillämpar en räkneregel på fel mängdtyp.

Äkta oändlig mängd:

> *En mängd är äkta oändlig, om den är lika stor som (mer exakt: ekvivalent med)* ***alla*** *delmängder av sig själv.*

Ett exempel är mängden av irrationella tal (varje enskilt tal är enligt ovan en oändlig mängd).

Hybrismängden:

> *En följd av siffror bildar ett decimallöst tal T > 0.*
> *Antalet siffror i T tillåts vara både uppräkneligt och ouppräkneligt.*
> *En mängd kallas hybrismängd, om dess antal element är T.*
>
> (T: se ovan, Hur mängder definieras!)
> En hybrismängd kan vara ändlig eller oändlig utan att vara definierad som någondera av dem.

Θ-mängden:

Θ-mängden beskrivs i avsnittet Taluppdelning ovan!

Två matematiska system

Ett exakt tal är identifierbart och uppnåeligt oberoende av, hur stort det är. Ett oändligt tal är en storleksordning och kan av det skälet inte ha ett exakt värde. Denna skillnad resulterar i två skilda matematiska system – ändlighetsmatematik och oändlighetsmatematik. De är usla på att samarbeta, vilket följande exempel visar.

Exempel 1
Jag har läst en relativt nyutkommen bok skriven av en världsberömd svensk fysikprofessor (Max Tegmark). Han tar bland annat upp fysikens måttproblem, vilket handlar om att räkna med det oändliga, och säger följande.

> Matematikerna har tagit fram en elegant lösning de kallar gränsvärdesberäkning som i många fall ger mening åt bråket ∞/∞. Till exempel, hur stor andel av alla naturliga tal 1, 2, 3... är jämna? Det finns oändligt många tal och oändligt många är jämna, så andelen är ∞/∞. Men om vi bara räknar de första *n* talen får vi ett meningsfullt svar som till viss del beror på vid vilket tal vi sätter en övre gräns. Om vi fortsätter att öka *n*, finner vi att andelen pendlar allt mindre ju mer *n* ökar. Om vi nu sätter gränsen där *n* närmar sig oändligheten får vi ett väldefinierat svar som inte beror på *n* överhuvudtaget: exakt hälften av alla tal är jämna.

Detta låter som ett rimligt svar, men oändligheter är förrädiska: den andel tal som är jämna beror på vilken ordning vi räknar dem i! Om vi i stället ordnar dem 1, 2, 4, 3, 6, 8, 5, 10, 12, 7, 14, 16 och så vidare ger samma gränsvärdesschema svaret att $^2/_3$ av talen är jämna! För efter hand som vi fortsätter ner genom listan med tal ser vi att det går två jämna tal på varje ojämnt. Vi fuskade inte, ty förr eller senare dyker alla jämna och udda tal upp på vår lista. Vi har bara ändrat ordningen på dem. På samma sätt kan jag, genom att ordna om talen på lämpligt sätt, bevisa för dig att andelen jämna tal är ett dividerat med ditt telefonnummer ...

Min kommentar
I det ändliga fallet (ett fixerat antal ingående tal) kan vi arrangera talens ordning, som vi vill. Antalet udda respektive jämna tal är oförändrat många, så fördelningen blir alltid densamma. I gränsvärdesberäkningen är det i varje enskilt beräkningssteg en talföljd med ett fixerat antal ingående tal – ändligt med andra ord.

I citatets andra stycke, näst sista meningen, menar professorn, att de saknade talen dyker upp längre bort. Han åberopar *oändlighetsmatematik* genom att indirekt hänvisa till Hilberts hotell (som jag nämnt några sidor tidigare). Nu befinner vi oss plötsligt i oändligheten och där saknar tal exakta värden. Där gäller inte Peanos axiomsystem. Där kan vi inte skilja på udda och jämna tal, då vart och ett består av oändligt många siffror. Det finns ingen identifierbar sistasiffra som talar om ifall talet är udda eller jämnt.

Dessutom: I det oändliga fallet (Hilberts hotell) är antalet ingående tal okänt. Om vi vill lista talen baklänges, så vet vi inte, vilket vi ska börja med.

Exempel 2
Från en annan bok av en annan känd svensk fysikprofessor (Ulf Danielsson) citerar jag:

”Men att säga att något är oändligt är bara ett annat sätt att säga att något är väldigt, väldigt, väldigt stort. Så stort att man inte behöver bry sig om de exakta dimensionerna. Det är i alla bemärkelser *tillräckligt* stort.”

Min kommentar
Här är en uppenbar sammanblandning av begreppen oändlig och ändlös. I och med att han säger ”*tillräckligt* stort”, kan jag konstruera naturliga tal som är större än hans oändlighet. Talet gox, beskrivet en handfull sidor tidigare, lär ligga bortom hans storleksbehov.

Att blanda de båda matematiksystemen är en fälla som, tror jag, drabbar väldigt många som arbetar med matematikens oändlighet. Det är lätt att gå vilse där, även för den klokaste.