Fermats stora sats

Det saknas lösning till $a^n + b^n = c^n$, då $n > 2$, om a, b, c och n ∈ mängden av positiva heltal.
==

FÖRORD

Satsens enda kända bevis kommer från den engelske professorn Andrew Wiles. Men det är grymt komplext med sina 130 sidor plus tusentals hänvisningar till stödfakta. Några få matematiker i världen förstår det till fullo.

På de följande sidorna redovisar jag i all anspråkslöshet mitt eget hittills bästa försök att nå ett korrekt bevis i *Fermats* anda. Utöver beviset återfinns inskjutna exempel, förtydliganden, upprepningar och några blickar bortom satsen.

I beviset är a, b och c positiva heltal utan undantag. Det är n, jag har i kikarsiktet!

Mitt ”bevis” låg i stort sett klart 2010. Efter åtta års uppehåll återupptog jag finslipning och sökande efter brister. I det senare fallet har jag inte lyckats så bra, vilket ju är positivt.

Har jag tänkt fel eller oklart, så må det vara hänt. Resan var i alla fall uppiggande och kan gärna få fortsätta en bit till.

Synpunkter mottages gärna via sms/mms eller e-post utan länkar eller bilagor.

2019-03-03
Jan Leidenhed
Slånbärsvägen 31
418 77 Göteborg
070-55 44 248
jan@leidenhed.se

Förspel

Förutsättning

Variablerna a, b och c är positiva heltal, där $0 < a < b < c$.
a och b är relativt prima (saknar gemensam faktor), detta för att i beviset slippa multipla lösningar.

Också n är ett positivt heltal, men med undantag. Dessa påpekas på plats.

Kommentar om identitet (≡) och likhet (=):

$a^2 = 5a - 6$ talar om, att båda sidor har samma värde (= 4 eller 9) när a = 2 eller 3, men ingen av sidorna kan omformas internt till att bli utseendemässigt exakt lik den andra. En andragradskurva och en rät linje är aldrig identiska.

Omforma högerledet i $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ genom att utföra multiplikationen. Vi får $a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$ alltså identiteten
$a^2 + 2ab + b^2 \equiv a^2 + 2ab + b^2$, eller $a^2 + 2ab + b^2 \equiv (a + b)^2$, vilket som.

aha = aha x F + E är en identitet, bara om F = 1 och E = 0 *samtidigt*:
aha = aha x 1 + 0 ger aha ≡ aha.

Uppmjukning:

Om a = 3 och b = 4, så får vi följande.
n = 1 ger $3^1 + 4^1 = 7 = c^1$ som ger c = 7
n = 2 ger $3^2 + 4^2 = 25 = c^2$ som ger c = 5.
n = 3 ger $3^3 + 4^3 = 91 = c^3$ som ger $c \approx 4{,}4979$.
n = 4 ger $3^4 + 4^4 = 337 = c^4$ som ger $c \approx 4{,}2845$.
Vi anar, att när a och b är fixa, minskar c, när n ökar. Detta bevisas i följande *Olikhet 1*.

***Olikhet 1*: $c_n > c_{n+1}$.**

$$\mathbf{c_n} = (a^n + b^n)^{\frac{1}{n}} > (a^{n+1} + b^{n+1})^{\frac{1}{n+1}} = \mathbf{c_{n+1}}.$$

Bevis:

Upphöj i $(a^n + b^n)^{\frac{1}{n}}$ R $(a^{n+1} + b^{n+1})^{\frac{1}{n+1}}$ båda leden med n+1 och få

$(a^n + b^n)^{\frac{n+1}{n}}$ R $(a^{n+1} + b^{n+1})^{\frac{n+1}{n+1}}$.

VL = $(a^n + b^n)^{\frac{n+1}{n}} = (a^n + b^n) \times (a^n + b^n)^{\frac{1}{n}} > (a^n + b^n) \times (b^n)^{\frac{1}{n}} = a^n b + b^{n+1}$ = WL.

HL = $(a^{n+1} + b^{n+1})^{\frac{n+1}{n+1}} = a^{n+1} + b^{n+1}$.

WL R HL; $a^n b + b^{n+1}$ R $a^{n+1} + b^{n+1}$; $a^n b$ R a^{n+1}; b R a.
Då b > a, fås WL > HL och VL > WL > HL ger VL > HL.

För varje givet par a och b, enligt mina förutsättningar ovan, gäller alltså, att $c_n > c_{n+1}$.

Två likheter

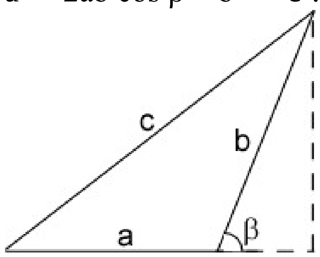
Dessa likheter skall ställas mot varandra i bevisföringen, vilket medför skärpta krav på bevisets förutsättningar.

Likhet 1:

$a^n + b^n = c^n$ beskriver en triangel med sidorna a, b och c, när $n \geq 1$ (n ej nödvändigtvis heltal) och $a + b \geq c$.
Om tvärtom $a + b < c$, är också $a^n + b^n < c^n$, eftersom $a^n + b^n < (a + b)^n$, d. v. s. ej triangel!
Triangelkravet utökar förutsättningen med tillägget $c \leq a + b$, alltså $0 < a < b < c \leq a + b$.

Likhet 2:

Cosinussatsen $a^2 - 2ab \cos \alpha + b^2 = c^2$ beskriver en triangel med sidorna a, b och c.
α är vinkeln mot sidan c. Jag ersätter α med yttervinkeln $\beta = 180° - \alpha$, vilket ger
$a^2 + 2ab \cos \beta + b^2 = c^2$.



Om jag startar med att sidorna a och b ligger i linje ($\beta = 0°$) och fortsätter med att vrida b moturs (växande β), kommer jag att möta ett hinder. När b har passerat $\beta = 90°$ och når fram till a:s mittpunktsnormal är plötsligt b och c lika långa och därefter gäller $b > c$, vilket strider mot förutsättningen $b < c$. Extremfallet ligger vid den ouppnåeliga vinkeln $\beta = 120°$, som svarar mot icke tillåtna $a = b = c$.

Mina förutsättningar utökas därför med $0° \leq \beta < 120°$, det vill säga $1 \geq \cos \beta > -1/2$.

Sammanfattning av förutsättningarna:

a, b och c är heltal med $0 < a < b < c \leq a + b$. a och b är relativt prima.
$n \geq 1$. Kommentar: Om $n = 1$, är $a = b$ tillåtet som enda undantag.
Jag fortsätter *tills vidare* med antagandet, att n också är ett heltal.
$1 \geq \cos \beta > -1/2$.

Vi har två likheter som beskriver **en och samma triangel**.
Likhet 1: $a^n + b^n = c^n$ innehåller variablerna a, b, c och n.
Likhet 2: $a^2 + 2ab \cos \beta + b^2 = c^2$ innehåller variablerna a, b, c och $\cos \beta$.
Likheterna har a, b och c gemensamt men skiljs åt i den fjärde variabeln (n och $\cos \beta$).

Hopkoppling av likheterna 1 och 2:

1: Upphöj båda leden i $a^n + b^n = c^n$ med 2 och få $(a^n + b^n)^2 = c^{2n}$.
2: Upphöj båda leden i $a^2 + 2ab \cos \beta + b^2 = c^2$ med n och få $(a^2 + 2ab \cos \beta + b^2)^n = c^{2n}$.

$(a^n + b^n)^2 = c^{2n} = (a^2 + 2ab \cos \beta + b^2)^n$, alltså $\mathbf{(a^n + b^n)^2 = (a^2 + 2ab \cos \beta + b^2)^n}$.

De ingående variablerna är a, b, n och $\cos \beta$. n, a och b (och sammanbindande c) är gemensamma för båda leden, som har den gemensamma graden 2n (Bägge = c^{2n}).
Jag fixerar nu a och b (och c) som konstanter. Kvar är variablerna n och $\cos \beta$.

Det fetmarkerade uttrycket ovan kan skrivas $a^{2n} + 2a^n b^n + b^{2n} = a^{2n} + T + b^{2n}$ och förenklas till $\mathbf{2a^n b^n = T}$.
T består av termer, där a och b ingår som faktorer i olika kombinationer $a^p b^q$.
p och q är positiva heltal och $p + q = 2n$.

Dela upp T i T_{nn} och R_{nn}.
T_{nn} är den term som innehåller $2a^n b^n$-faktorn (där $p = q$) och R_{nn} representerar de övriga termerna (där $p \neq q$).

T_{nn} kan skrivas $2a^n b^n$ x U_{nn}.

$\mathbf{2a^n b^n = T}$ kan nu skrivas som en eventuell identitet $2a^n b^n \equiv 2a^n b^n \times U_{nn} + R_{nn}$.
Identiteten $2a^n b^n \equiv 2a^n b^n$ gäller, när $U_{nn} = 1$ och $R_{nn} = 0$.

Säg att $U_{nn} = 1/2$ och $R_{nn} = a^n b^n$. Det ger $2a^n b^n = a^n b^n + R_{nn}$, där båda sidor har samma värde. De är inte identiska. Högerledets ursprungliga $2a^n b^n$ har försvunnit och reducerats till de två värdena $a^n b^n$ och R_{nn} (vars värde nu är $a^n b^n$-värdet). Det hade lika gärna kunnat stå $2a^n b^n$ = gurka + päron.
Identitet kräver, att högerledet kan omformas till utseendet $2a^n b^n$. Inget annat!

I uttrycket $\mathbf{2a^n b^n \equiv 2a^n b^n \times U_{nn} + R_{nn}}$ består vänstra ledet av en enda term, så om eventuell identitet finns, hänger den enbart på, ifall högra ledet kan omformas till (utseendet) $2a^n b^n$.

Kontroll av n = 1 och 2

Undersök $(a^n + b^n)^2 = (c^n)^2 = c^{2n} = (c^2)^n = (a^2 + 2ab \cos \beta + b^2)^n$ för n = 1 och 2.

n = 1:

vL: $(a^{\mathbf{1}} + b^{\mathbf{1}})^2 = a^2 + 2ab + b^2 = (c^1)^2 = c^2$;
hL: $(a^2 + 2ab \cos \beta + b^2)^{\mathbf{1}} = a^2 + 2ab \cos \beta + b^2 = c^2$;
vL ($= c^2$) = hL: $a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + 2ab \cos \beta + b^2$;

$2ab \equiv 2ab \cos \beta + 0$.
$U_{11} = \cos \beta$ och $R_{11} = 0$.
När $\mathbf{\cos \beta = 1}$, det vill säga då $\beta = 0°$, får vi $U_{11} = \cos \beta = 1$.
$U_{11} = 1$ och $R_{11} = 0$.
Identitet gäller. Lösning kan finnas.

$(a^{\mathbf{1}} + b^{\mathbf{1}})^2 = (c^2)^{\mathbf{1}}$ förenklas till $(a + b)^2 = c^2$, alltså $a + b = c$ som har möjliga lösningar, exempelvis 1 + 2 = 3 eller 12 + 23 = 35.

Både n och cos β är på heltalsform.

n = 2:

vL: $(a^{\mathbf{2}} + b^{\mathbf{2}})^2 = a^4 + 2a^2b^2 + b^4 = c^4$;
hL: $(a^2 + 2ab \cos \beta + b^2)^{\mathbf{2}} = a^4 + 4a^3b \cos \beta + 2a^2b^2 (1 + 2\cos^2 \beta) + 4ab^3 \cos \beta + b^4 = c^4$;
vL = hL ger
$2a^2b^2 \equiv 2a^2b^2 (1 + 2\cos^2 \beta) + 4a^3b \cos \beta + 4ab^3 \cos \beta$.

$U_{22} = 1 + 2\cos^2\beta$.
$R_{22} = 4a^3b\cos\beta + 4ab^3\cos\beta$.
När **cos β = 0**, alltså då $\beta = 90°$, får vi
$U_{22} = 1 + 2\cos^2\beta = 1$.
$R_{22} = \cos\beta \times (4a^3b + 4ab^3) = 0$.
Identitet gäller. Lösning kan finnas.

$(a^2 + b^2)^2 = (c^2)^2$ reduceras till $a^2 + b^2 = c^2$, som har möjliga lösningar, exempelvis $5^2 + 12^2 = 13^2$ eller $12^2 + 35^2 = 37^2$.

Både n och cos β är på heltalsform.

$n = 1$ och $n = 2$ ger kvittens på, att valet identitet fungerar. Högerledet kan omformas identiskt till vänsterledet i $2a^nb^n \equiv 2a^nb^n \times U_{nn} + R_{nn}$.

$\beta = 0°$ är kopplad till $n = 1$ och $\beta = 90°$ till $n = 2$. Detta ihop med Olikhet 1 ger, att intervallet $0° < \beta < 90°$ motsvarar $1 < n < 2$, varför n inte är heltal för vinklar mellan 0° och 90°.

Kontroll av n > 2

För $n > 2$ gäller det återstående intervallet $90° < \beta < 120°$ och där är cos β ett negativt icke-heltal, närmare bestämt $0 > \cos\beta > -½$. Här visar det sig, att identitet inte kan uppnås.

Undersök $(a^n + b^n)^2 = (a^2 + 2ab\cos\beta + b^2)^n$ för $n > 2$.

Udda n:
$U_{nn} = k_1\cos^1\beta + k_3\cos^3\beta + k_5\cos^5\beta + ... + k_n\cos^n\beta$, där alla $k_i > 0$.
Alla potenser i U_{nn} är udda och $\cos\beta < 0$. Det ger $U_{nn} < 0$, alltså $U_{nn} \neq 1$.
Ej identitet.

Jämna n:
$U_{nn} = k_0 + k_2\cos^2\beta + k_4\cos^4\beta + ... + k_n\cos^n\beta$, där alla $k_i > 0$.
Uträkning av $(a^2 + 2ab\cos\beta + b^2)^4$ ger, att $k_0 = 3$ (och därefter allt större med ökande n-värden). Därför är $k_0 \geq 3$, när $n > 2$.
Alla potenser i U_{nn} är jämna. Det ger $U_{nn} > 3$, alltså $U_{nn} \neq 1$.
Ej identitet.

Några exempel följer.

n = 3:
$(a^3 + b^3)^2 = (a^2 + 2ab\cos\beta + b^2)^3$;
$2a^3b^3 \equiv (6\cos\beta)a^5b + (3 + 12\cos^2\beta)a^4b^2 + (12\cos\beta + 8\cos^3\beta)a^3b^3$
$+ (3 + 12\cos^2\beta)a^2b^4 + (6\cos\beta)ab^5 =$
$= 2a^3b^3(6\cos\beta + 4\cos^3\beta)$
$+ (6\cos\beta)a^5b + (3 + 12\cos^2\beta)a^4b^2 + (3 + 12\cos^2\beta)a^2b^4 + (6\cos\beta)ab^5$;
$U_{33} = 6\cos\beta + 4\cos^3\beta$.
$R_{33} = (6\cos\beta)a^5b + (3 + 12\cos^2\beta)a^4b^2 + (3 + 12\cos^2\beta)a^2b^4 + (6\cos\beta)ab^5$.
$\cos\beta < 0$ ger $U_{33} < 0$, alltså $U_{33} \neq 1$.
Ej identitet.

n = 4:

$(a^4 + b^4)^2 = (a^2 + 2ab \cos \beta + b^2)^4$;

Här nöjer jag mig av utrymmesbrist med att bara redovisa $2a^4b^4$-termen.

$2a^4b^4 \equiv 2a^4b^4 (3 + 24\cos^2\beta + 8\cos^4\beta) + R_{44}$.

$U_{44} = 3 + 24\cos^2\beta + 8\cos^4\beta$.

Jämna potenser ger, att alla termerna i U_{44} är positiva och $U_{44} > 3$, alltså $U_{44} \neq 1$.

Ej identitet.

n = 5:

Jag går direkt på U_{55}.

$U_{55} = 30 \cos \beta + 80\cos^3\beta + 16 \cos^5\beta$.

$\cos \beta < 0$ ger $U_{55} < 0$, d. v. s. $U_{55} \neq 1$.

Ej identitet.

n = 6:

Jag går direkt på U_{66}.

$U_{66} = 10 + 180\cos^2\beta + 240\cos^4\beta + 32\cos^6\beta > 10$, d. v. s. $U_{66} \neq 1$.

Ej identitet.

Förutsättningen att a, b och c är positiva heltal gäller orubbad. Men identiteten (≡) kraschar, när n är ett heltal > 2.

För n = 1 och 2 bestod identiteten av variabler som allihop var heltal (a, b, n och cos β). cos β återfinns enbart i högra ledet, de övriga i båda. Jag utgår från fixa värden på a och b (och indirekt c), vilket betyder, att de enda variablerna är återstående cos β och n. Dessa varierar i par med varandra. När cos β ändrades till en icke-heltalsvariabel, föll identiteten. För en *eventuell* återbalansering av denna krävs, att också den medspelande variabeln, alltså n, ändras till icke-heltal. n kan därför inte vara ett *heltal* > 2.
Högst 2 giltiga heltalsvärden hos cos β (1 och 0, men ej -1 som ligger utanför det tillåtna intervallet) betyder högst 2 heltalsvärden hos n (1 och 2).

Jag upprepar! Det handlar om två beskrivningar av en enda gemensam triangel – med samma form, samma plats, samma orientering i koordinatsystemet och samma gradtal i i de båda leden. De är identiska!!! Därför måste n, under de givna förutsättningarna, som enda möjliga alternativ följa cos β i dess avhopp från heltal.

Därmed är satsen bevisad.

När n är icke-heltal

När n släpper heltalskravet, finns det alltid en lösning med a, b och c som heltal med enda begränsningarna $n > 0$ och $0 < a < b < c$. Här behöver vi inte längre triangelbegränsningen ($c \leq a + b$).

Exempel

3 < n < 4

Säg att vi söker det värde på n som ger $6^n + 7^n = 8^n$.
$n = 3$ ger $6^3 + 7^3 = 559 = (8{,}237661...)^3$.
$n = 4$ ger $6^4 + 7^4 = 3697 = (7{,}797625...)^4$.
Olikhet 1 säger, att n ligger mellan värdena 3 och 4. Beräkningar leder till $n \approx 3{,}45785$, som ger $6^{3,45785} + 7^{3,45785} \approx 8{,}000007^{3,45785}$.
Nära 8 med ett ungefärligt värde på n. Ett exaktare n-värde ger exaktare resultat.
$\cos \beta = -1/4$. $\beta \approx 104°$.

2 < n < 3

$6^n + 11^n = 12^n$ hittar på samma sätt (som i $4 > n > 3$) det ungefärliga värdet $n \approx 2{,}405$.
$\cos \beta = -13/132$. $\beta \approx 96°$.

1 < n < 2

$n \approx 1.507$ ger $2^{1.507} + 3^{1.507} \approx 4^{1.507}$.
$\cos \beta = 1/4$. $\beta \approx 76°$.

0 < n < 1

$n = 2/3$ ger exakt $27^{2/3} + 64^{2/3} = 125^{2/3}$. Uträknat: $9 + 16 = 25$.
Observera dock, att uttrycket inte beskriver en triangel, då en sida är längre än summan av de andra: $27 + 64 < 125$.

Om n är ett heltal ≤ 0

n = 0

$a^0 + b^0 = c^0$ blir $1 + 1 = 1$. Orimligt!

n < 0 (Sätt $n = -m$)

$a^{-m} + b^{-m} = c^{-m}$ ger $\frac{1}{a^m} + \frac{1}{b^m} = \frac{1}{c^m}$.
Sätt $A = \frac{1}{a^m}$, $B = \frac{1}{b^m}$ och $C = \frac{1}{c^m}$, alltså $A + B = C$.
Då $a < b < c$ blir $A > B > C$ och $A + B > C$. Orimligt!

Så blev vi av med heltals-$n \leq 0$. ☻